ASSET ALLOCATION AND PORTFOLIO OPTIMISATION

NGO-Khoa Anh[1] and GILBERT-Abichacra [2]

E-mails: khoa.ngo@etu.u-paris.fr / abichacrag@gmail.com

ABSTRACT. Ce rapport est une étude de certains des principaux aspects de l'**optimisation du portefeuille** en temps **discret**. Nous considérons trois des principaux critères et discutons de la **méthode de programmation dynamique** ainsi que de **la méthode des martingales** en tant que méthodes de solution possibles. Nous élaborons des exemples explicites pour **une fonction d'utilité logarithmique** et pour le cas de la binomial complète.

Keywords: Principe de programmation dynamique, la méthode des martingales.

1 Introduction

La gestion de portefeuille est un aspect fondamental de l'**économie** et de la **finance**. Dans une terminologie financière, le problème de l'**optimisation du portefeuille** d'un investisseur négociant différents actifs consiste à choisir un investissement optimal, c'est-à-dire le nombre d'actions de tel ou tel actif qu'il doit détenir à tout moment de la négociation, afin de maximiser un certain critère subjectif (dépendant de ses préférences) reposant sur sa richesse totale et/ou sa consommation.

En ce qui concerne les méthodologies de solution, nous discutons de la méthode de programmation dynamique (DP) ainsi que de la méthode dite "martingale methode". Cette dernière méthode varie selon que le marché est complet ou non, c'est-à-dire selon qu'il existe ou non une mesure martingale équivalente unique. Comme exemple de marché complet en temps discret, nous considérons le modèle de marché binomial classique et comme exemple de modèle incomplet lorsqu'il n'y a qu'un seul actif sous-jacent risqué.

2 Rappel

Nous considérons un marché financier, dans lequel les prix des actifs évoluent en temps discret. c'est à dire pour $t = 1, ..., T$ sur un espace de probabilité sous-jacent (Ω, F, F_t, P). C'est un actif (localement) non risqué, dont le prix évolue comme suit :

$$B_{t+1} = (1 + r_t)B_t$$

où r_t est le taux d'intérêt, et un certain nombre K d'actifs risqués dont le vecteur de prix est :

$$S_t = (S_t^1, ..., S_t^K)$$

Le generique S_t^i évolue selon

$$S_{t+1}^i = S_t^i \xi_{t+1}^i$$

avec (ξ_t^i) i.i.d des séquences de variables aléatoires, en tant que processus, S_t^i est Markovien

2.1 Probabilité risque-neutre

Rappelons la notion de probabilité risque neutre. Étant donné la mesure de probabilité P dans (Ω, F), une mesure de probabilité Q est dite equivalente à P et on note $Q\ P$, si Q a les mêmes ensembles nuls que P de plus Q est appelée mesure martingale équivalente si tous les actifs du marché, exprimés en unités de l'actif sans risqe B_t, sont des (Q, F_t) martingales. En d'autres termes si pour $i = 1, ..., K$ nous avons

$$E^Q \left\{ \frac{S_{t+1}^i}{B_{t+1}^i} | F_t \right\} = \frac{S_t^t}{B_t}$$

(1)

ce qui equivaut a

$$E_Q \left\{ S_{t+1}^i | F_t \right\} = \frac{B_{t+1}}{B_t} S_t^i = (1 + r_t) S_t^i$$

(2)

2.2 Mesure de Martingale dans le modèle de marché binomial

Nous avons vu qu'une mesure martingale équivalente à P est une mesure Q   P sur Ω tel que (1) soit verifié. En écrivant

$$q := Q \left\{ X_{t+1} = 1 | F_t \right\}$$

et avec plus de simplicité $r_t = r$, la relation (1) donne

$$(qu + (1-q)d) S_t = (1+r) S_t$$

On trouve donc

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d}$$

Ce q est unique et $\in (0, 1)$ à condition que $d < 1 + r < u$

Soit Ω l'univers du modèle binomial model, et soit $\omega \in \Omega$ on peut écrire

$$P(\omega) = p^n (1-p)^{T-n}; Q(\omega) = q^n (1-q)^{T-n}$$

tel que pour la dérivée de Radon-Nikodym sur Ω on obtient

$$L(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = (\frac{q}{p})^n(\frac{1-q}{1-p})^{T-n}$$

(3)

3 Fonction utilité

Nous rappelons tout d'abord la notion standard d'une fonction d'utilité qui, en fonction du processus de richesse $V = (V_t)$ est telle que

- $u(V)$ est **strictement croissant**, **strictement concave** et **differentiable**. De plus,
- $u'(\infty) := \lim_{V\to\infty} u'(V) = 0$ et $\lim_{V\to 0^+} u'(V) = \infty$

Il sera pratique d'étendre cette définition à $V < 0$ en mettant $u(V) = -\infty$

Voici des exemples de fonctions d'utilité (dans l'intervalle $V > 0$) :

- $u(V) = log(V)$ le log-fonction utilite
- $u(V) = \frac{V^\alpha}{\alpha}(0 < \alpha < 1)$ la fonction d'utilité de puissance pour un investisseur risk-averse

Nous pouvons maintenant considérer trois critères d'investissement :

- Maximisation de l'utilité espérée de la richesse finale

$maxE\left\{u(V_T^\alpha)\right\}$ avec $V_0 = v$ et α : auto-financement

- Maximisation de l'utilité esperee de la consommation

$maxE\left\{\sum_{t=0}^T \beta^t u(C_t)\right\}$ avec $V_0 = v$ et $\beta \in (0,1)$ un facteur d'actualisation et (C,α): autofinancement et admissibilité

- Maximisation de l'utilité esperee de la consommation et de la richesse finale

$maxE\left\{\sum_{t=0}^T \beta^t u_c(C_t) + \beta^T u_p(V_T^\alpha - C_T)\right\}$ avec A_v qui contient α est auto-financement et previsible, C est non negative, adapte et $C_T \leq\ V_T$

4 Méthodes de solution

4.1 Programmation dynamique

4.1.1 Contexte generale

Soit $V_t,\ t = 0,1,...,T$, un processus donné (comme par exemple le processus de valeur de portefeuille), dont l'évolution dépend du choix d'une 'séquence de contrôle'(équivalente à une stratégie) $\pi_t,\ t = 0,..,T$, adaptée à un filtrage observé donné. Un exemple typique d'une telle situation est

$$V_{t+1} = G_t(V_t, \pi_t, \xi_{t+1})$$

, $\xi_t i.i.d$

et remarquez que, si $\pi_t = \pi_t(V_t)$, (contrôles de Markov), alors V_t est un processus de Markov. Le site séquence de contrôle π_t est choisie de manière à maximiser un critère (additif dans le temps), ie

$$\max_{\pi_0,\dots,\pi_T} E\left\{\sum_{t=0}^{T} u(V_t,\pi_t)\right\}$$

(4)

avec $u(.)$ une fonction d'utilité (dans les applications traditionnelles de contrôle stochastique, le dernier terme pour $t = T$, c'est-à-dire l'utilité terminale, ne dépend pas du contrôle π).

4.1.2 Le principe de la programmation dynamique

La méthode de programmation dynamique (PD) pour obtenir le control maximisant (4) est basée sur le principe de programmation dynamique, qui est : si un processus est optimal sur une séquence entière de périodes, alors il doit être optimal sur chaque période. Dans le contexte général décrit ci-dessus, le principe PD permet de déterminer la séquence optimale $\pi_0, ..., \pi_T$ par une séquence de minimisations sur les contrôles individuels π_t (minimisations scalaires). En fait, en raison de la Markovianity de π_t, V_t et de l'additivité dans le temps du critère,

$\max\limits_{\pi_0,\dots,\pi_T} E\left\{\sum_{t=0}^{T} u(V_t,\pi_t)\right\} = \max\limits_{\pi_0}[u(V_0,\pi_0)+E\left\{\max\limits_{\pi_1}[u(V_1,\pi_1)+E\left\{... + E\left\{\max\limits_{\pi_{T-1}}[u(V_{T-1},\pi_{T-1}) + E\max\limits_{\pi_T}[u(V_T,\pi_T)|\right.\right.\right.$
V$_{T-1},\pi_{T-1}\}]|V_{T-2},\pi_{T-2}\}...|V_1,\pi_1\}]|V_o,\pi_0\}]$

4.1.3 Mise en œuvre du principe du PD

La façon dont le principe DP est utilisé pour déterminer le control maximisant (4) est la suivante suivante. Soit

$$U_t(v) := \max_{\pi_t,\dots,\pi_T} E\left\{\sum_{s=0}^{T} u(V_s,\pi_s)|V_t = v\right\}$$

(5)

alors le principe DP conduit à l'algorithme DP suivant

$$\begin{cases} U_T(v) = \max\limits_{\pi_t} u(v,\pi_T) \\ U_T(v) = \max\limits_{\pi_t}[u(v,\pi_t) + E\left\{U_{t+1}(G_t(V_t,\pi_t,\xi_{t+1}))|V_t = v\right\}]\text{si t} < \text{T} \end{cases} \quad (6)$$

qui donne la valeur optimale et le contrôle optimal (obtenu par induction inverse avec maximisation scalaire). Remarquez que l'on a automatiquement π_t^{max} comme fonction de V_t

4.1.4 Contexte spécifique (utilité esperee de la richesse terminale)

Nous mentionnons ici comment l'algorithme général de programmation dynamique, décrit ci-dessus, peut être appliqué au cas spécifique de la maximisation de l'utilité esperee de la richesse finale.

Nous considérons comme V_t la valeur du portefeuille. Comme contrôle/stratégie nous prenons $\pi_t = (\pi_t^0, \pi_t^1, ..., \pi_t^K)$ avec

$$\pi_t^0 = \frac{\alpha_{t+1}^0 B_t}{V_t}, \ \pi_t^i = \frac{\alpha_{t+1}^i S_t^i}{V_t} \qquad \text{i=(1,...,K)}$$

ie les fractions de richesse investies dans les différents actifs de manière à ce que

$$\pi_t^0 = 1 - \sum_{i=1}^K \pi_t^i \qquad (\pi_t^i \in (0,1))$$

Rappelons que, par la propriété d'autofinancement,

$$V_t = \alpha_t^0 B_t + \sum_{i=1}^K \alpha_t^i S_t^i = \alpha_{t+1}^0 B_t + \sum_{i=1}^K \alpha_{t+1}^i S_t^i$$

et que nous avions supposé que α était prévisible avec

$$S_{t+!}^i = S_t^i . \xi_{t+1}^i \qquad (\xi_t^i \ \textbf{i.i.d})$$

Par la propriété d'autofinancement et les définitions précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} V_{t+1} &= V_t + \alpha_{t+1}^0 \triangle B_t + \sum_{i=1}^K \alpha_{t+1}^i \triangle S_t^i \\ &= \mathrm{V}_t + \alpha_{t+1}^0 B_t r_t + \textstyle\sum_{i=1}^K \alpha_{t+1}^i S_t^i (\xi_{t+1}^i - 1) \\ &= \mathrm{V}_t + V_t[\pi_t^0 r_t + \textstyle\sum_{i=1}^K \pi_t^i (\xi_{t+1}^i - 1)] \end{aligned} \qquad (7)$$

ie, on a

$$V_{t+1} = G_t(V_t, \pi_t, \xi_{t+1})$$

avec

$$G_t(V_t, \pi_t, \xi_{t+1}) = V_t[\pi_t^0(1 + r_t) + \sum_{i=1}^K \pi_t^i \xi_{t+1}^i]$$

(8)

et maintenant $\pi_t = (\pi_t^1, \pi_t^2, ..., \pi_t^K)$

Dans le cas présent, nous n'avons qu'une utilité terminale, soit

$$u(V_t, \pi_t) = 0 \text{ pour t<T, et } u(V_T, \pi_T) = u(V_t)$$

ce qui implique (il n'y a pas de π_T sur lequel maximiser)

$$U_t(v) := \max_{\pi_t, ..., \pi_{T-1}} E\left\{U(V_T) | V_t = v\right\}$$

et l'algorithme PD devient

$$\begin{cases} U_T(v) = u(v) \quad \text{ et pour t<T} \\ U_t(v) = \max_{\pi_t} E\left\{U_{t+1}(G_t, (V_t, \pi_t, \xi_{t+1}))|V_t = v\right\} \end{cases} \quad (9)$$

4.2 Méthode de Martingales

4.2.1 Introduction

Rappelons que dans le cas où il n'y a de consommation, le processus de valeur actualisée de toute stratégie autofinancante est une martingale sous toute mesure martingale (on suppose implicitement les conditions d'intégrabilité requises sur la stratégie comme verifiées).

La méthode martingale peut être utilisée pour la résolution de problèmes généraux d'optimisation stochastique, mais elle tire son origine du problème financier de la couverture d'une créance. Nous verrons ici ce qui est utile à la compréhension de la méthode de la martingale.

La méthode martingale se base sur trois étapes

• Déterminer l'ensemble des valeurs atteignables pour la richesse v_T à la date T;

• Déterminer la richesse optimale atteignable v_T^*;

• Déterminer une stratégie autofinancante α^* telle que $V_T^{\alpha^*} = V_T^*$ où dans V_T on rend explicite la dépendance entre la richesse terminale et la stratégie α.

Remarquons que cette méthode décompose le problème dynamique initial d'optimisation de portefeuille (ou tout autre problème d'optimisation dynamique) en un problème statique (détermination de la richesse optimale atteignable) et en un problème de couverture (qui correspond à un "problème de représentation martingale"). Nous procédons maintenant à une description des deux premières étapes ; la troisième étape sera illustrée ci-dessous lors de la résolution de problèmes spécifiques d'optimisation de portefeuille. Plus précisément, nous allons illustrer les deux premières étapes du problème de maximisation de l'utilité espérée à partir de la richesse terminale ; pour les deux autres critères d'investissement, ces étapes seront abordées dans la section 5 suivante.

4.2.2 Première étape : ensemble de valeurs atteignables du portefeuille

Le problème consiste à determiner l'ensemble

$\nu_v = \{V : V_T^\alpha \text{ pour une strategie autofinancante et predictible } \alpha \text{ avec } V_0 = v\}$ des valeurs atteignables du portefeuille à la date T

Si le marché est complet avec une unique probabilité risque neutre Q alors

$\nu_v = \left\{V : E^Q\left\{B_T^{-1}V\right\} = v\right\}$

4.2.3 Deuxième étape : valeur de portefeuille optimale atteignable

Formellement, le problème est : determiner V^* telle que

$$E\{u(V^*)\} \geq E\{u(V)\}, \forall V \in \nu_v$$

Pour résoudre cette deuxième étape nous mentionnerons la méthode basée sur la technique du multiplicateur de Lagrange. Nous admetterons que V^* est effectivement optimal.

Technique du multiplicateur de Lagrange

Cas d'un marché complet - mesure martingale unique Q

Soit $L := \frac{dQ}{dP}$ et soit λ le multiplicateur de Lagrange. $V_0 = v$ est equivalent $E^Q\left\{B_T^{-1}V\right\} = v$. Le problème devient

$$\max_V [E\left\{u(V)\right\} - \lambda E^Q\left\{B_T^{-1}V\right\} = \max_V E\left\{u(V) - \lambda B_T^{-1}LV\right\}$$

$u(.)$ etant une fonction d'utilité, nous avons que l'inverse de la dérivée existe et nous la noterons par $I(.) = (u_0(.))^{-1}$. D'autre part, maximiser l'espérance du côté droit de (19) équivaut à maximiser ses arguments pour chaque scénario/état de la nature possible $w \in \Omega$. Une condition necessaire pour cela est que

$$u'(V) = \lambda B_T^{-1}L$$

implique $V = I(\lambda B_T^{-1}L)$

À cela, nous devons ajouter que le multiplicateur de Lagrange λ doit satisfaire l'equation suivante (equation de budget) :

$$E^Q[B_T^{-1}I(\lambda B_T^{-1}L)] = v$$

$\Leftrightarrow v = E\left\{LB_T^{-1}I(\lambda B_T^{-1}L)\right\} := V(\lambda)$

Cela implique que quand $V(.)$ est inversible, $\lambda = V^{-1}(v)$ et par conséquent on obtient

$$V^* = I(V^{-1}(v)B_T^{-1}L)$$

Pour illustrer la faisabilité de cette procédure nous considerons le cas d'une fonction log-utilité, i.e. $u(V) = logV$, pour qui $I(y) = \frac{1}{y}$

L'equation de budget devient alors

$$v = E\left\{LB_T^{-1}I(\lambda B_T^{-1}L)\right\} = E\left\{LB_T^{-1}\frac{B_T}{\lambda L}\right\} = \frac{1}{\lambda} = V(\lambda)$$

cela implique que $\lambda = \frac{1}{V}$ alors la richesse optimale devient

$$V^* = I(B_T^{-1}L) = VL^{-1}B_T$$

5 Le cas de l'utilité logarithmique, calculs explicites

Dans cette section, nous décrirons plus explicitement les différentes étapes requises à la fois pour la méthode de programmation dynamique que pour la méthode des martingales dans le cas d'une fonction de log-utilité et pour chacun des trois critères d'investissement. En particulier, nous montrerons comment réaliser la troisième étape de l'approche martingale, à savoir la détermination de la stratégie d'investissement optimale. Pour simplifier, nous supposerons sans perte de généralité que le prix de l'actif non risqué, qui est utilisé pour compter les différents autres prix, est $B_t = 1$; puisque nous prenons implicitement $B_0 = 1$, cela revient à supposer que le taux d'intérêt à court terme est $r_t 0$. Comme calculer explicitement les différentes étapes de la méthode des martingales dépend de manière assez crucialement du choix de la fonction d'utilité, les calculs par la méthode des martingales sont plus faciles à réaliser la programmation dynamique (PD) qui est moins dépendante du choix de la fonction d'utilité. Néanmoins, dans cette section, nous rendrons un peu plus explicites les étapes requises par DP, car cela n'est pas immédiatement évident pour les deuxième et troisième critères d'investissement. Des calculs numériques pour des exemples spécifiques sont ensuite présentés dans la section suivante pour la maximisation de l'utilité de la richesse finale.

5.1 Maximiser l'utilité esperée de la richesse finale

Après avoir rappelé brièvement la forme particulière que prend l'approche de programmation dynamique dans ce cas (comme mentionné plus haut, pour ce critère d'investissement), nous allons décrire la forme particulière que prend l'approche martingale dans ce cas et illustrer le calcul de la stratégie optimale.

5.1.1 Programmation Dynamique

Rappelons (9) l'algorithme de programmation dynamique, à savoir

$$\begin{cases} U_T(v) = u(v) \quad \text{et pour t<T} \\ U_t(v) = \max_{\pi_t} E\left\{U_{t+1}(G_t, (V_t, \pi_t, \xi_{t+1}))|V_t = v\right\} \end{cases} \tag{10}$$

où la dynamique $G_t(V_t, \pi_t, \xi_{t+1})$ a été spécifiée dans (8), à savoir

$$G_t(V_t, \pi_t, \xi_{t+1}) = V_t[\pi_t^0(1 + r_t) + \sum_{i=1}^{K} \pi_t^i \xi_{t+1}^i]$$

Le seul aspect particulier ici est que $K = 1$ et, en laissant $\pi_t = \pi_t^1 = \frac{\alpha_{t+1}^1 St}{V_t}$, on a $\pi_t^0 = (1 - \pi_t)$. Avec l'interdiction des ventes à découvert,ie en exigeant $\alpha_t^1 > 0$, on obtient $\pi_t \in (0, 1)$. Puisque $r_t = 0$, on peut alors ecrire

$$G_t(V_t, \pi_t, \xi_{t+1}) = V_t[1 + \pi_t(\xi_{t+1} - 1)]$$

5.1.2 Methode de Martingale

En rappelant de la section 3.1 le processus N_t nous avons que $N_T \sim b(T, p)$ et il représente la v.a qui compte le nombre total de "mouvements ascendants" du processus de prix S_t. Avec $u(x) = log(x)$ on a en rappelant que nous prenons $B_t = 1$,

$$V^* = v(\frac{p}{q})^{N_T}(\frac{1 - p}{1 - q})^{T - N_T}$$

(11)

et la valeur optimale de l'utilité esperee de la richesse terminale est alors

$$E\left\{u(V^*)\right\} = log(v) - log(\frac{q}{p})E(N_T) - log(\frac{1-q}{1-p})(T - E\{N_T\})$$

$$= log(v) - pTlog(\tfrac{q}{p}) - T(1-p)log(\tfrac{1-q}{1-p})$$

(12)

5.2 Maximiser l'utilité esperee de la consommation

Comme nous l'avons mentionné dans la sous-section précédente, la méthode de programmation dynamique ne dépend pas du fait que le marché soit complet ou non, seule la méthode martingale le fait. Pour le cas présent de l'utilité espérée de la consommation, nous ne considérons donc pour le modèle de marché binomial complet, comme nous l'avons fait pour l'utilité espérée de la richesse terminale où cela était motivé par le désir de mieux illustrer les différences possibles. Ici, nous mentionnons simplement les différences qui apparaissent lorsque nous discutons de la méthode des martingales elle-même.

5.2.1 Programmation dynamique

On considère à nouveau les actifs risqués sous-jacents K dont les prix sont les suivants

$$S^i_{t+1} = S^i_t.\xi^i_{t+1} \qquad \text{i=(1,...,K)}$$

on a, par la condition d'autofinancement pour le cas avec consommation telle que décrite dans la section 2.2 et en complète analogie avec (7) et (8),

$$V_{t+1} = V_t + \alpha^0_{t+1}\triangle B_t + \sum_{i=1}^{K}\alpha^i_{t+1}\triangle S^i_t - C_t$$

$$= \mathrm{V}_t + V_t[\pi^0_t r_t + \textstyle\sum_{i=1}^{K}{}^i_t(\xi^i_{t+1} - 1)] - C_t$$

$$=\mathrm{V}_t[(1+r_t) + \textstyle\sum_{i=1}^{K}\pi^i_t(\xi^i_{t+1} - (1+r_t))] - C_t(1+r_t)$$

ie on a

$$V_{t+1} = G_t(V_t, \pi_t, \xi_{t+1})$$

avec

$$G_t(V_t, \pi_t, \xi_{t+1}) = V_t[(1+r_t) + \sum_{i=1}^{K}\pi^i_t(\xi^i_{t+1} - (1+r_t))] - C_t(1+r_t)$$

et avec la séquence/stratégie de contrôle

$$\pi_t = (\pi^1_t, ..., \pi^K_t, C_t)$$

ou, comme en avant, $\pi_t^i = \frac{\alpha_{t+1}^i S_t^i}{V_t}$

En concernant la description générale de la méthode de programmation dynamique dans la section 4.1, dans ce cas, on a

$$u(V_t, \pi_t) = u(C_t)$$

avec la contrainte $C_T \leq V_T$

Pour mise en œuvre le principe de programmation dynamique, correspondant ici à (5), on met

$$U_t(v) := \max_{c_t,\ldots,c_T} E\left\{\sum_{s=t}^{T} \beta^{s-t} u(C_S) | V_t = v\right\}$$

où la condition $C_T \leq V_T$ peut être prise en compte en mettant

$$u(C_T) = -\infty \qquad \text{pour } C_T \geq V_T$$

alors le principe PD conduit à l'algorithme PD suivant

$$\begin{cases} U_T(v) = \begin{cases} u(v) \text{ si } C_T = V \\ -\infty \text{ si } C_T > V \end{cases} \\ U_t(v) = \max\limits_{\pi_t}[u(C_t) + \beta E\left\{U_{t+1}(G_t(V_t, \pi_t, \xi_{t+1}))|V_t = v\right\}] \end{cases}$$

où la non-négativité de C est garantie par $u(C) = -\infty$ pour $C < 0$.

5.2.2 Methode de Martingale

Rappelons que pour la maximisation de l'utilité de la richesse terminale, nous avons besoin de :

• déterminer l'ensemble des valeurs atteignables/réalisables de la richesse en T ;

• déterminer la richesse optimale ;

• déterminer une stratégie d'autofinancement qui reproduit la richesse optimale.

Ici, la richesse terminale est remplacée par le processus de consommation adapté Ct et nous changeons donc les exigences ci-dessus en les étapes suivantes :

• déterminer l'ensemble des processus de consommation "atteignables" ;

• déterminer le processus de consommation optimal atteignable ;

• déterminer une stratégie d'investissement permettant de consommer selon le processus de consommation optimal.

Pour mettre en œuvre ces étapes, nous partons du lemme suivant,

LEMME 1. Étant donné une richesse initiale $v \leq 0$, un processus de consommation C_t, et une stratégie d'autofinancement α, on a

$$\frac{V_t}{B_t} = v + \bar{G}_t - \sum_{s=0}^{t-1} \frac{C_s}{B_s} \qquad \text{t=1,...,T}$$

(13)

où $\bar{G}_t$ est le processus d'actualisation des gains

$$\bar{G}_t = \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{i=1}^{K} \alpha_{s+1}^i \triangle \bar{S}_s^i$$

Première étape :

Définition 6. Un processus de consommation C_t est dit atteignable si $\exists\alpha$ avec (C, α) admissible $C_T = V_T$ (α "réplique" ou "génère" C)

On maintenant que le processus $v + \bar{G}_t$ est une Q-martingale en mettant $V_T = CT$, de (31) on a immédiatement :

Proposition 2. Étant donné v, un processus de consommation C est réalisable si

$$v = E^Q \left\{ \frac{C_0}{B_0} + ... + \frac{C_T}{B_T} \right\}$$

Deuxième étape :

On discutera directement de cette étape pour le cas plus général d'un marché incomplet avec un nombre fini J de mesures martingales extrémales. Dans le cas présent de maximisation de l'utilité espérée de la consommation, cette seconde étape consiste à obtenir le processus de consommation optimal réalisable en résolvant

$$\begin{cases} \max\limits_{C} E \left\{ \sum_{t=0}^{T} \beta^T u(C_t) \right\} \\ \text{sous reserve de } E^{Q^j} \left\{ \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{B_t} \right\} = v \end{cases} \qquad (14)$$

Remarquez que la seule variable de décision ici est $C_t(t = 0, ..., T)$; α_t n'apparaît pas. Remarquez également que la non-négativité de C_t est garantie par $u(C) = -\infty$ pour $C < 0$.

Afin de résoudre le problème (14), définissez $N_t^j := B_t^{-1} E \left\{ L^j | F_t \right\}$ $(L^j = \frac{dQ^j}{dP})$ donc

$$E^{Q^j} \left\{ \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{B_t} \right\} = E \left\{ L^j \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{B_t} \right\}$$

$$= E \left\{ \sum_{t=0} T E \left\{ B_t^{-1} C_t L^j | F_t \right\} \right\} = E \left\{ \sum_{t=0}^{T} C_t N_t^j \right\}$$

donc (14) devient

$$\begin{cases} \max\limits_{C} E \left\{ \sum_{t=0}^{T} \beta^T u(C_t) \right\} \\ \text{sous reserve de } E \left\{ \sum_{t=0}^{T} C_t N_t^j \right\} = v \end{cases} \qquad (15)$$

En utilisant, comme précédemment, la technique du multiplicateur de Lagrange pour résoudre (15), on doit calculer

$$\max_C E\left\{\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(C_t) - \sum_{j=1} J\lambda_j \sum_{t=0}^{T} C_t N_t^j\right\}$$

Une condition nécessaire pour que C_t maximise, pour chaque scénario, l'argument de la l'espérance est

$$\beta^t u'(C_t) = \sum_{j=1}^{J}\lambda_j N_t^j$$

ce qui implique

$$C_t = I\left(\frac{\sum_{j=1}^{J}\lambda_j N_t^j}{\beta^t}\right)$$

avec λ_j satisfaisant le système d'"équations budgétaires"

$$E\left\{\sum_{t=0}^{T} N_t^j I\left(\frac{\sum_{j=1}^{J}\lambda_j N_t^j}{\beta^t}\right)\right\} = v$$

et la valeur optimale devient

$$J(v) = E\left\{\sum_{t=0}^{T}\beta^t u\left(I\left(\frac{\sum_{j=1}^{J}\lambda_j N_t^j}{\beta^t}\right)\right)\right\}$$

Troisième étape :

En complète analogie avec le cas précédent de l'utilité espérée de la richesse terminale, elle consiste ici à déterminer la stratégie d'investissement d'un portefeuille autofinancé ayant une valeur terminale $V_T = C_T$, et la procédure elle-même peut être reportée directement à partir de là.

6 Conclusion

Le but de l'agent est d'obtenir le plus de plus-value pendant la période d'investissement [0,T] selon une préférence d'utilité qu'il a. Nous avons vu 2 méthodes pour maximiser cette utilité en temps discret Le cas continue reste à discuter

References

[1] Huyen Pham, Optimization methods in portfolio management and option hedging, 5 Jun 2009

[2] Wolfgang J. Runggaldier, Portfolio Optimization in discrete time

[3] S. Geissel, H. Graf, J. Herbinger F.T.Seifried, Portfolio optimization with optimal expected utility risk measures, 22 November 2021

[4] Pascucci Runggaldier, 2012, Financial Mathematics: Theory and Problems for Multi-period Models, Springer (chapitre 2)